



**Zadanie 1** Znajdź takie cyfry  $A_1, A_2, \dots, A_{100}$ , że  $1A_1A_2\dots A_{100}3 : 3A_1A_2\dots A_{100}1 = 13 : 31$ .

**Zadanie 2** Oblicz

a)  $1 + 11 + 111 + 1111 + \dots + \underbrace{111\dots 11}_{12 \text{ cyfr}}$

b)  $5 + 55 + 555 + \dots + \underbrace{555\dots 55}_{8 \text{ cyfr}}$

**Zadanie 3** Wykaż, że jeśli pewna liczba całkowita przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1, przy dzieleniu przez 4 daje resztę 3 oraz przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3, to przy dzieleniu przez 60 daje resztę 43.

**Zadanie 4** Wykaż, że liczba postaci  $3^{2018} + 6^{2017}$  jest podzielna przez 5.

**Zadanie 5** Tomek i Jaś zbierają znaczki. Tomek stwierdził, iż gdyby Jaś oddał mu trzecią część swojej kolekcji znaczków, to obydwaj mieli by po tyle samo znaczków. Po kilku dniach koledzy znowu się spotkali. Każdy z nich miał po 60 znaczków więcej niż ostatnio. Tomek tym razem stwierdził, iż gdyby mu Jaś oddał czwartą część swojej kolekcji znaczków to by mieli po tyle samo. Ile znaczków ma każdy z chłopców.

**Zadanie 6** Wyznacz liczbę 4-cyfrową, której dwie pierwsze cyfry są jednakowe, dwie ostatnie cyfry są jednakowe i która jest kwadratem liczby całkowitej.

**Zadanie 7** Wykaż, że jeżeli liczby  $a, b, c$  spełniają warunek  $b^2 = ac$  to  $(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + b^2 + c^2$ .

**Zadanie 8** Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich  $a, b, c$  zachodzi nierówność

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{a+b+c}{2}$$

**Zadanie 9** Oblicz  $\sqrt{\underbrace{11\dots 1}_n \cdot \underbrace{100\dots 05}_n + 1}$

**Zadanie 10** Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich  $p, k$  zachodzi nierówność

$$\sqrt[3]{(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} \leq \sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$$



**Zadanie 11** Niech liczby rzeczywiste  $p, k, s$  spełniają warunek  $p + k + s = 1$ . Sprawdź, czy

$$pk + ks + ps \leq \frac{1}{3}.$$

**Zadanie 12** Niech  $\frac{a-c}{b+c} + \frac{b-a}{c+a} + \frac{c-b}{a+b} = 1$ . Wykaż, że  $\sqrt{\frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{c+a} + \frac{c+a}{a+b}}$  jest równe najmniejszej liczbie pierwszej.

**Zadanie 13** Wyznacz  $A$  oraz  $B$ , wiedząc, że  $\frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2} = \frac{7x+6}{x^2+x-6}$

**Zadanie 14** Wyznacz  $A$  oraz  $B$ , wiedząc, że  $\frac{A}{x+1} - \frac{B}{x-5} = \frac{8x+2}{x^2-4x-5}$

**Zadanie 15** Wykaż, że  $\frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-c)(b-a)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)} = \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{c-a}$ , gdzie  $a \neq b, b \neq c, c \neq a$ .

**Zadanie 16** Przejazd łódką 20km w dół rzeki i z powrotem trwał 7 godzin. Równocześnie z łódką z tego samego miejsca wypłynęła tratwa, którą spotkano w drodze powrotnej w odległości 12km od miejsca wyruszenia. Oblicz prędkość rzeki.

**Zadanie 17** Wyznacz wszystkie liczby pierwsze  $x, y, z$  spełniające równanie  $xyz = 5(x + y + z)$ .