

Dowody algebraiczne

1. Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej a , prawdziwa jest nierówność

$$a + \frac{1}{a} \geq 2.$$

2. (4 pkt) Wykaż, że nierówność $\sqrt[4]{\frac{a^4 + b^4}{2}} \geq \sqrt[4]{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ jest spełniona przez wszystkie liczby rzeczywiste.

3. (4 pkt) Uzasadnij, że jeżeli $a \neq b, a \neq c, b \neq c$ i $a + b = 2c$, to $\frac{a}{a-c} + \frac{b}{b-c} = 2$

4. (3 pkt) Uzasadnij, że jeżeli $2a + b \geq 0$, to $2a^3 + b^3 \geq 3a^2b$.

5. (3 pkt) Udowodnij, że dla każdych dwóch liczb rzeczywistych dodatnich x, y prawdziwa jest nierówność $(x+1)\frac{x}{y} + (y+1)\frac{y}{x} > 2$.

6. (2 pkt) matura maj 2016 r. Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x i y takich, że $x^2 + y^2 = 2$, prawdziwa jest nierówność $x + y \leq 2$.

7. (4 pkt) Wykaż, że dla $a, b, c, d > 0$ prawdziwa jest nierówność $\sqrt{a+b} \cdot \sqrt{c+d} \geq \sqrt{ac} + \sqrt{bd}$.

8. (3 pkt) matura maj 2017 r. Udowodnij, że dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność $x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 > 0$.

9. Wykaż, że jeśli $x > 0$, to $\frac{5x^2 + x + 5}{x} \geq 11$.

Dowody algebraiczne

1. Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej a , prawdziwa jest nierówność

$$a + \frac{1}{a} \geq 2.$$

2. (4 pkt) Wykaż, że nierówność $\sqrt[4]{\frac{a^4 + b^4}{2}} \geq \sqrt[4]{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ jest spełniona przez wszystkie liczby rzeczywiste.

3. (4 pkt) Uzasadnij, że jeżeli $a \neq b, a \neq c, b \neq c$ i $a + b = 2c$, to $\frac{a}{a-c} + \frac{b}{b-c} = 2$

4. (3 pkt) Uzasadnij, że jeżeli $2a + b \geq 0$, to $2a^3 + b^3 \geq 3a^2b$.

5. (3 pkt) Udowodnij, że dla każdych dwóch liczb rzeczywistych dodatnich x, y prawdziwa jest nierówność $(x+1)\frac{x}{y} + (y+1)\frac{y}{x} > 2$.

6. (2 pkt) matura maj 2016 r. Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x i y takich, że $x^2 + y^2 = 2$, prawdziwa jest nierówność $x + y \leq 2$.

7. (4 pkt) Wykaż, że dla $a, b, c, d > 0$ prawdziwa jest nierówność $\sqrt{a+b} \cdot \sqrt{c+d} \geq \sqrt{ac} + \sqrt{bd}$.

8. (3 pkt) matura maj 2017 r. Udowodnij, że dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność $x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 > 0$.

9. Wykaż, że jeśli $x > 0$, to $\frac{5x^2 + x + 5}{x} \geq 11$.